

Міністерство освіти і науки України
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
Кафедра диференціальних рівнянь і математичної фізики

Затверджено

Проректор з наукової роботи та
інновацій

проф. Бояр А.О. 

« 23 » серпня 2016 р.

Затверджено

Проректор з науково-педагогічної і
навчальної роботи та рекрутації

проф. Гаврилюк С.В. 

« 23 » серпня 2016 р.



ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ
ПРОГРАМА
НОРМАТИВНОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

підготовки доктора філософії
галузі знань 11 «Математика та статистика»
спеціальності 111 «Математика»

Луцьк – 2016

Програма навчальної дисципліни «Функціональний аналіз» для докторів філософії за спеціальністю 111 «Математика». – 15 квітня 2016 року. – 5 с.

Розробник:

доктор фіз.–мат. наук,
професор кафедри диференціальних рівнянь
і математичної фізики



Чичурін О.В.

Рецензент:

кандидат фіз.–мат. наук,
доцент, зав. кафедри алгебри та математичного аналізу



Кальчук І.В.

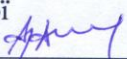
Програма навчальної дисципліни затверджена на засіданні кафедри диференціальних рівнянь і математичної фізики

протокол № 14 від 18. 04. 2016 р.

Завідувач кафедри:  (Чичурін О.В.)

Програма навчальної дисципліни схвалена науково-методичною комісією факультету інформаційних систем, фізики та математики

протокол № 9 від 12. 05. 2016 р.

Голова науково-методичної комісії факультету  (Полетило С.А.)

Програма навчальної дисципліни схвалена науково-методичною радою університету

протокол № 10 від 15. 06. 2016 р.

Програма навчальної дисципліни схвалена науковою радою університету

протокол № 11 від 16. 06. 2016 р.

© Чичурін О.В., 2016

Вступ

Програма навчальної дисципліни «Функціональний аналіз» складена відповідно до освітньо-наукової програми підготовки здобувачів вищої освіти ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика».

Предметом вивчення навчальної дисципліни є: елементи теорії множин, метричних просторів, топологічних просторів, а також конкретні метричні задачі.

Міждисциплінарні зв'язки: курс «Функціональний аналіз» тісно пов'язаний з такими дисциплінами як «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра», «Теорія функцій дійсної змінної», «Теорія ймовірності», «Математична статистика».

Програма навчальної дисципліни складається з **шести змістових модулів:**

3 семестр

Змістовий модуль I. Метричні простори.

Змістовий модуль II. Топологічні простори.

Змістовий модуль III. Нормовані і лінійні простори.

4 семестр

Змістовий модуль IV. Лінійні функціонали і лінійні оператори.

Змістовий модуль V. Простори сумовних функцій.

Змістовий модуль VI. Тригонометричні ряди. Перетворення Фур'є.

1. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета викладання навчальної дисципліни «Функціональний аналіз» - сформувати у здобувачів вищої освіти ступеня доктора філософії цілісне уявлення про предмет і методи функціонального аналізу; ознайомити з основними поняттями і задачами теорії множин, загальної теорії неперервних відображень метричних і топологічних просторів, теорії міри й інтегрування в загальних «просторах з мірою».

Основними завданнями вивчення дисципліни «Функціональний аналіз» є формування у здобувачів вищої освіти ступеня доктора філософії розуміння предмету та методів теорії множин, метричних просторів, топологічних просторів, а також вироблення глибоких знань основ класичного аналізу та вміння застосовувати ці знання на практиці при дослідженні та розв'язанні конкретних задач.

В процесі вивчення дисципліни здобувачі вищої освіти ступеня доктора філософії ознайомлюються:

- з основними поняттями функціонального аналізу;
- поняттями і методами теорії множин, загальної теорії неперервних відображень метричних і топологічних просторів, теорії міри;
- проблематикою класичного та прикладного аналізу.

Згідно з вимогами освітньо-наукової програми здобувачі вищої освіти ступеня доктора філософії повинні:

знати:

- визначення гомеоморфізму;

- визначення замкнених, відкритих множин, точок дотику, напрямленої множини, околів точок;
- визначення метричних, повних метричних просторів;
- приклади стискуючих відображень;
- принцип вкладених куль;
- визначення лінійного нормованого простору;
- визначення лінійних функціоналів та операторів в лінійних нормованих просторах;
- теореми Хана-Банаха, Банаха-Штенгауза, Банаха про обернений оператор;
- визначення гільбертового простору, приклади;
- нерівність Бесселя та рівність Парсеваля-Стеклова;
- терему Рісса, спектральну теорему.

вміти:

- знаходити границі множин;
- знаходити міри множин, перевіряти, чи є функції множин мірами, зовнішніми мірами;
- робити поповнення міри;
- перевіряти функції на вимірність;
- досліджувати послідовності вимірних функцій на збіжність;
- знаходити інтеграли Рімана та Лебега від функцій на вимірних множинах;
- перевіряти аксіоми топологічної структури, метрики, норми, скалярного добутку;
- перевіряти множини на замкненість та відкритість в топологічному просторі;
- застосовувати принцип стискуючих відображень в алгебрі та аналізі, принцип вкладених куль;
- перевіряти оператори та функціонали на адитивність, однорідність, лінійність, обмеженість, неперервність;
- ортогоналізувати системи незалежних елементів, будувати ряди Фур'є по ортогональних системах елементів;
- знаходити спектр оператора.

На вивчення навчальної дисципліни «Функціональний аналіз» відводиться 180 годин / 6 кредитів ЄКТС.

2. Інформаційний обсяг навчальної дисципліни

Навчальна дисципліна «Функціональний аналіз» складається з шести змістових модулів. Кількість змістових модулів визначається метою та змістом програми вивчення дисципліни протягом двох семестрів.

3 семестр

Змістовий модуль I. Метричні простори.

Тема 1. Поняття метричного простору.

Означення і основні приклади. Неперервні відображення метричних просторів.

Тема 2. Збіжність. Відкриті і замкнуті множини.

Граничні точки. Замикання, Збіжність. Щільні підмножини. Відкриті і замкнуті множини. Відкриті і замкнуті множини на прямій.

Тема 3. Повні метричні простори.

Означення і основні приклади повних метричних просторів. Теорема про вкладені кулі. Теорема Бера. Доповнення простору.

Тема 4. Принцип стискуючих відображень та його застосування.

Принцип стискуючих відображень. Найпростіші застосування принципу стискуючих відображень. Теорема існування та єдиності для диференціальних рівнянь. Застосування принципу стискуючих відображень до інтегрування рівнянь.

Змістовий модуль II. Топологічні простори.

Тема 5. Компактність.

Поняття компактності. Неперервні відображення компактних просторів. Зліченна компактність. Перед компактні множини.

Тема 6. Компактність у метричних просторах.

Означення компактної множини та компакта у метричному просторі. Теорема Хаусдорфа про компактність множини у повному метричному просторі.

Критерій компактності в $C[a,b]$. Теорема Арцела.

Тема 7. Топологічні лінійні простори.

Означення топологічного лінійного простору. Приклади. Лінійна залежність та незалежність елементів лінійного простору.

Тема 8. Спряжений простір.

Поняття спряженого простору. Основні приклади.

Змістовий модуль III. Нормовані і лінійні простори.

Тема 9. Лінійні простори.

Означення лінійного простору. Приклади лінійних просторів. Лінійна залежність та незалежність елементів лінійного простору. Підпростори. Приклади підпросторів. Фактор-простір. Означення лінійного функціонала. Геометричний зміст лінійного функціонала.

Тема 10. Опуклі множини і опуклі функціонали. Теорема Хана-Банаха.

Опуклі множини і опуклі тіла. Однорідно-опуклі функціонали. Функціонал Міньковського. Теорема Хана-Банаха.

Тема 11. Нормовані простори.

Означення і приклади нормованих просторів. Підпростори нормованих просторів.

Тема 12. Евклідові простори.

Простір Евкліда. Унітарні простори. Ортогональність елементів. Ортогональні та ортонормовані системи. Приклади просторів зі скалярним добутком. Процес ортогоналізації Шмідта. Гільбертовий простір. Комплексні евклідові простори.

4 семестр

Змістовий модуль IV. Лінійні функціонали і лінійні оператори.

Тема 13. Неперервні лінійні функціонали.

Неперервні лінійні функціонали в топологічних лінійних просторах. Лінійні функціонали на нормованих просторах. Лінійні функціонали в зчисленно-нормованих просторах.

Тема 14. Слабка топологія і слабка збіжність.

Слабка топологія і слабка збіжність в лінійному топологічному просторі. Слабка збіжність в нормованих просторах. Слабка топологія і слабка збіжність у спряженому просторі.

Тема 15. Узагальнені функції.

Розширення поняття функції. Простір основних функцій. Узагальнені функції. Дії над узагальненими функціями.

Тема 16. Лінійні оператори.

Означення і приклади лінійних операторів. Неперервні лінійні оператори. Обмежені лінійні оператори. Спряжені оператори. Спряжений оператор в евклідовому просторі. Самоспряжені оператори.

Тема 17. Компактні оператори.

Означення і приклади компактних операторів. Основні властивості компактних операторів. Компактні оператори в гільбертовому просторі.

Змістовий модуль V. Простори сумовних функцій.

Тема 18. Простір L_1 .

Означення і основні властивості простору L_1 . Скрізь щільні множини в L_1 .

Тема 19. Простір L_2 .

Означення і основні властивості простору L_2 . Випадок нескінченної міри. Скрізь щільні множини в L_2 . Теорема про ізоморфізм.

Тема 20. Ортогональні системи функцій в L_2 . Ряди по ортогональних системах.

Тригонометрична система. Тригонометричний ряд Фур'є. Ряд Фур'є в комплексній формі. Многочлени Лежандра. Кратні ряди Фур'є. Функція Ерміта. Ортогональні многочлени з дискретною вагою.

Змістовий модуль VI. Тригонометричні ряди. Перетворення Фур'є.

Тема 21. Умови збіжності ряду Фур'є.

Достатні умови збіжності ряду Фур'є в точці. Умови рівномірної збіжності ряду Фур'є.

Тема 22. Теорема Фейєра.

Теорема Фейєра. Повнота тригонометричної системи. Теорема Вейєрштрасса.

Тема 23. Інтеграл Фур'є.

Основна теорема. Інтеграл Фур'є в комплексній формі.

Тема 24. Перетворення Фур'є, властивості.

Перетворення Фур'є і теорема обернення. Основні властивості перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є і згортка функцій. Застосування перетворення Фур'є до розв'язування рівнянь теплопровідності. Перетворення Фур'є функцій кількох змінних.

3. Форма підсумкового контролю успішності навчання – залік (3 семестр), іспит (4 семестр).

4. Методи та засоби діагностики успішності навчання:

усне опитування, письмові роботи, контрольні роботи, самостійні роботи, тестові завдання, залік, екзамен.

5. Список джерел

1. Городецкий В.В. Методы решения задач по функциональному анализу: Учеб. Пособие / В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев. – К.: Выща шк., 1990. – 479 с.
2. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика / Л. В. Канторович. – УМН III, вып. 6 (28), 1948, с. 89-185.
3. Канторович Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959. – 350 с.
4. Колмогоров А.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник для вузов / А.В. Колмогоров, С.В. Фомин. – 6-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1989. – 624 с.
5. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1976. – 320 с.
6. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
7. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.